Vectoranalyse

Midtoets 24 mei 2012

university of groningen

Het tentamen bestaat uit 3 vraagstukkken. U krijgt 120 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. Het maximaal aantal punten dat u kunt behalen is 100. U krijgt 10 punten gratis. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. (Nederlands) [15+15 **Punten.**]

   We bekijken de twee oppervlakken

   $$\begin{array}{ll} S & \text{gegeven door } z = x^2 + 3x + y^2 + 2y \quad \text{en} \\ T & \text{gegeven door } z = -x^2 + 3x - y^2 + 2y \end{array}$$

   die elkaar raken in een punt.

   (a) Toon aan dat dit punt de oorsprong is en laat zien dat het raakvlak U beschreven wordt door $3x + 2y - z = 0$.

   (b) Bekijk nu de sfeer $1 = x^2 + y^2 + z^2$. Er zijn twee punten waar het raakvlak aan de sfeer parallel is met U, het raakvlak aan S en T. Vind deze punten.

1. (English) [15+15 **Points.**]

   Consider the two surfaces

   $$\begin{array}{ll} S & \text{defined by } z = x^2 + 3x + y^2 + 2y \quad \text{and} \\ T & \text{defined by } z = -x^2 + 3x - y^2 + 2y \end{array}$$

   that touch each other in one point.

   (a) Show that this point is the origin and that the tangent plane U is given by $3x + 2y - z = 0$.

   (b) Consider the sphere $1 = x^2 + y^2 + z^2$. There are two points on the sphere where the tangent plane to the sphere is parallel to U, the tangent plane of S and T. Find these points.

2. (Nederlands) [10+10+10 **Punten.**]

   (a) Stel we hebben een vergelijking van de vorm

   $$F(x, y, z) = 0.$$

   We kunnen z dus beschouwen als een impliciet gedefinieerde functie $z(x, y)$. Maak gebruik van de kettingregel om te laten zien dat als F en $z(x, y)$ beide differentierbaar zijn, geldt

   $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}.$$

(b) Gebruik onderdeel (a) om $\partial z/\partial x$ en $\partial z/\partial y$ te berekenen waarbij z impliciet gedefinieerd is door $xyz = 2$.

(c) Toon aan dat als x, y, z impliciet gerelateerd zijn via een vergelijking $F(x, y, z) = 0$, geldt

$$\left(\frac{\partial x(y,z)}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y(x,z)}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right) = -1.$$

2. (English) [**10+10+10 Points.**]

(a) Suppose that you are given an equation of the form

$$F(x, y, z) = 0.$$

Then we may consider z to be defined implicitly as a function $z(x, y)$. Use the chain rule to show that if F and $z(x, y)$ are both assumed to be differentiable, then

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

(b) Use part (a) to compute $\partial z/\partial x$ and $\partial z/\partial y$ where z is implicitly defined by $xyz = 2$.

(c) Show that if x, y, z are related implicitly by an equation $F(x, y, z) = 0$, then

$$\left(\frac{\partial x(y,z)}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y(x,z)}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right) = -1.$$

3. (Nederlands) [**15+15 Punten.**]

Gebruik de Lagrangemultiplicatoren methode voor het volgende.

(a) Bepaal de grootste sfeer met middelpunt in de oorsprong die geheel binnen de ellipsoïde $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ ligt.

(b) Bepaal de kleinste sfeer met middelpunt in de oorsprong die geheel buiten de ellipsoïde $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ ligt.

3. (English) [**15+15 Points.**]

Use the method of Lagrange multipliers for the following.

(a) Determine the largest sphere centered at the origin that lies completely inside of the ellipsoid $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

(b) Determine the smallest sphere centered at the origin that lies completely outside of the ellipsoid $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.